DURÉE : 4 heures

On désigne par E l'espace vectoriel sur C des fonctions deux fois dérivables de $\mathbb{R}$ dans C. On notera f' et f'' les dérivées première et seconde de $f \in E$.

Le problème a principalement pour but d'établir que les assertions (A1) et (A2) suivantes, portant sur un élément h de E,

(A1) Il existe $\lambda, \mu, \nu \in C$, *non tous nuls*, tels que

$$\lambda h'' + \mu h' + \nu h = 0.$$

(A2) Il existe f, g, u, v fonctions de $\mathbb{R}$ dans C telles que

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R} \quad h(x+y) = f(x)\,u(y) + g(x)\,v(y)$$

sont équivalentes, et de trouver alors des fonctions f, g, u, v (elles ne sont pas uniques) de sorte que (A2) généralise la formule d'addition pour les fonctions sin, cos, sh, ch, etc.

I. PRÉLIMINAIRES

1° Soient $r, s, t \in C$ avec $r \neq s$, et soient R, S, T les fonctions de $\mathbb{R}$ dans C définies par

$$R(x) = e^{rx}, \qquad S(x) = e^{sx}, \qquad T(x) = xe^{tx}.$$

On dira par la suite que R (ou S) est une fonction exponentielle, ou, plus simplement, une exponentielle.

a. Montrer que les exponentielles R et S sont linéairement indépendantes sur C.

b. Trouver $\lambda, \mu, \nu \in C$, non tous nuls, tels que R et S soient solution de l'équation différentielle $\lambda Y'' + \mu Y' + \nu Y = 0$.

c. Montrer que les fonctions R, S et T sont linéairement indépendantes sur C.

2° Soient $\lambda, \mu, \nu \in C$ non tous nuls et $F = \{ f \in E : \lambda f'' + \mu f' + \nu f = 0 \}$.

a. Soit L l'application de F dans C^2 définie par

$$L(f) = (f(0), f'(0)).$$

Montrer que L est injective.

b. Soit h un élément de F. Montrer que les quatre assertions suivantes, portant sur h, sont équivalentes :

(i) h n'est pas multiple d'une exponentielle;

(ii) h et h' sont linéairement indépendantes (sur C);

(iii) $\{ h, h' \}$ est une base de F;

(iv) $\widehat{h}(0) = h(0)\,h''(0) - (h'(0))^2$ n'est pas nul.

[On conseille d'établir (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (i)].

3° On se donne un sous-espace F de E, de dimension $\leqslant 2$. On dira que F est *stable* si, pour tout $f \in F$, f' appartient à F, et on notera alors D l'endomorphisme $f \to f'$ de F. Montrer que F est stable si et seulement s'il existe $\lambda, \mu, \nu \in C$, non tous nuls, tels que F soit égal à $\{ f \in E : \lambda f'' + \mu f' + \nu f = 0 \}$.

4° On suppose que le sous-espace F du 3° est stable.

a. Montrer que les coefficients λ, μ, ν du 3° sont uniquement déterminés à un facteur multiplicatif commun près.

b. À quelles conditions portant sur λ, μ, ν le sous-espace F est-il de dimension exactement 0, 1 ou 2?

c. À quelles conditions sur λ, μ, ν l'endomorphisme D est-il diagonalisable?

II

On résout ici (A1) $\Leftrightarrow$ (A2) dans un cas particulier.

On se donne $h \in E$ et on considère les assertions suivantes portant sur h

(A'1) Il existe $\mu, \nu \in C$, non tous nuls, tels que :

$$\mu h' + \nu h = 0.$$

(A'2) Il existe deux fonctions f et u de $\mathbb{R}$ dans C telles que :

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R} \quad h(x+y) = f(x)\,u(y).$$

1° Montrer que (A'1) implique (A'2), et qu'alors, sauf cas trivial, f et u sont multiples de h.

Tournez la page S. V. P.

2° On suppose que h vérifie (A'2).

a. Montrer que $h(0) = 0 \Leftrightarrow h = 0$.

b. Montrer qu'il existe $\varphi \in E$ telle que :

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R} \quad h(x+y) = \varphi(x)\,\varphi(y).$$

c. Montrer que h vérifie (A'1).

III

On résout maintenant (A1) ⇒ (A2).

On se donne $h \in E$ et on suppose que h n'est pas multiple d'une exponentielle (expliquer pourquoi). Soient alors $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{C}$ non tous nuls tels que $\lambda h'' + \mu h' + \nu h = 0$ et $F = \{ f \in E : \lambda f'' + \mu f' + \nu f = 0 \}$.

1° Montrer que $\{ h, h' \}$ est une base de F.

2° Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, soit h_x la fonction $y \to h_x(y) = h(x+y)$. Montrer que h_x appartient à F.

3° Montrer qu'il existe f, g fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, uniques, telles que l'on ait :

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R} \quad h(x+y) = f(x)\,h(y) + g(x)\,h'(y)$$

si bien que h vérifie (A2). Exprimer f et g en fonction de h et h' et des constantes $h(0)$, $h'(0)$, $h''(0)$ et $\hat{h}(0)$ [cf. I. 2° *b*].

4° Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$. Montrer que h vérifie la *formule d'addition* suivante : pour tout $x, y \in \mathbb{R}$

$$h(x+y) = ah(x)\,h(y) + b\,[h'(x)\,h(y) + h(x)\,h'(y)] + ch'(x)\,h'(y)$$

si et seulement si $a = h''(0)/\hat{h}(0)$, $b = -h'(0)/\hat{h}(0)$, $c = h(0)/\hat{h}(0)$.

IV

On résout ici (A2) ⇒ (A1).

On se donne $h \in E$ et on suppose qu'il existe f, g, u, v fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telles qu'on ait pour tout $x, y \in \mathbb{R}$

$$h(x+y) = f(x)\,u(y) + g(x)\,v(y).$$

On appelle F l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ engendré par f, g, u, v. On suppose que $\{f, g\}$ et $\{u, v\}$ sont libres (expliquer pourquoi).

1° Montrer que la dimension de F est égale à 2.

2° Montrer que f, g, u, v appartiennent à E et que le sous-espace F de E contient f', g', u', v' et h.

3° En déduire que h vérifie (A1), et n'est pas multiple d'une exponentielle.

V

Où l'on regarde de plus près la formule d'addition.

On se donne $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que $ac - b^2 \neq 0$ et on désigne par $H(a, b, c)$ l'ensemble des $h \in E$ vérifiant la formule d'addition : pour tout $x, y \in \mathbb{R}$

$$h(x+y) = ah(x)\,h(y) + b\,[h'(x)\,h(y) + h(x)\,h'(y)] + ch'(x)\,h'(y).$$

1° Trouver, pour $r \in \mathbb{C}$, les multiples de l'exponentielle $x \to e^{rx}$ appartenant à $H(a, b, c)$.

2° Soient $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{C}$ avec $\lambda \neq 0$.

a. Montrer que, si on a $\lambda a - \mu b + \nu c \neq 0$, alors toute $h \in H(a, b, c)$ vérifiant $\lambda h'' + \mu h' + \nu h = 0$ est un multiple d'exponentielle.

b. Montrer que, si on a $\lambda a + \mu b + \nu c = 0$, alors il existe une et une seule $h \in H(a, b, c)$ vérifiant $\lambda h'' + \mu h' + \nu h = 0$ et qui ne soit pas un multiple d'exponentielle.

3° Trouver toutes les fonctions réelles appartenant à H (0, 1, 0).

4° On suppose a, b, c, réels. Soit $h \in H(a, b, c)$ réelle. Montrer qu'il existe $r, s, 0 \in \mathbb{R}$ tels que si l'on pose

$$\varphi = h\cos\theta - h'\sin\theta, \qquad \psi = h\sin\theta + h'\cos\theta$$

alors on ait, pour tout $x, y \in \mathbb{C}$,

$$h(x+y) = r\varphi(x)\,\varphi(y) + s\psi(x)\,\psi(y).$$

• • •

E.N.S.E.T.
Section A2—
page 59
1987